

Ein versicherungsmathematischer Ansatz zur Berechnung von Marktwerten der Deckungsrückstellung in der Lebensversicherung

Sandra Haas · Peter Ladreiter

Online publiziert: 7. April 2012
© Springer-Verlag 2012

Zusammenfassung Basierend auf den bekannten versicherungsmathematischen Berechnungsmethoden zur Bestimmung der Höhe von versicherungstechnischen Verbindlichkeiten für die Lebensversicherung wird eine Lösung zur Kalkulation von Marktwerten vorgestellt, welche den Prinzipien von Solvency II Rechnung trägt. Kernstück dabei ist die Diskontierung von wahrscheinlichkeitsgewichteten künftigen Cashflows, welche durch die Berechnung von aktuarischen Barwerten unter Einbeziehung von Rechnungsgrundlagen 2. Ordnung (Zinskurve, Stornoverhalten, Kosten, Prämienfreistellungsverhalten, etc.) umgesetzt wird. Die Studie enthält sowohl die Herleitung und Diskussion des benötigten Formelwerkes als auch die exemplarische Darstellung anhand ausgewählter Tarifbeispiele. Die besprochenen Prinzipien sind auch maßgeblich für die geplanten IFRS Vorschriften, welche mittlerweile als Exposure Draft vorliegen.

Abstract Based on well-known actuarial calculation principles for the determination of the liabilities for life insurance contracts, we present a method for the calculation of fair values of liabilities. This method is consistent with the Solvency II requirements. The main principle is the discounting of probability weighted future cash flows, including assumptions on interest rates, costs and lapse for the calculation of actuarial present values. In addition to the mathematical framework, we discuss some numerical results that compare the traditional liabilities with the fair value approach. The presented principles are also relevant for the IFRS directives, which are at the moment available as exposure draft.

Dipl. Ing. S. Haas (✉)
HEC, Department of Actuarial Science, University of Lausanne, Lausanne, Schweiz
e-mail: sandra.haas@unil.ch

DDr. P. Ladreiter
Security KAG, Burgring 16, 8010 Graz, Österreich
e-mail: peter.ladreiter@securitykag.at

1 Einleitung

Die Deckungsrückstellung, als zentrale passivseitige Größe in der Bilanzierung von Versicherungsunternehmen, wird entsprechend des österreichischen Unternehmensgesetzbuchs (UGB) bzw. der deutschen HGB-Vorschriften mit deterministischen und in die Zukunft konstanten Zinssätzen berechnet. Zusätzlich werden Annahmen zur Sterblichkeit über die Vertragslaufzeit verwendet und etwaige Abhängigkeiten zur Entwicklung der Aktivseite nicht in Betracht gezogen. Das Eigenmittelerfordernis nach Solvency I orientiert sich ebenfalls nur an der Deckungsrückstellung und lässt die Aktivseite sowie die damit verbundenen Risiken außer Acht.

Durch das Projekt Solvency II wird dieser Ansatz nun geändert, das Augenmerk richtet sich verstärkt auf eine gemeinsame Risikobetrachtung von Aktiv- und Passivseite und das Eigenmittelerfordernis soll in Zukunft auf Basis von Marktwerten der Bilanzansätze berechnet werden. Dadurch wird nun zunehmend der Fokus auf den Marktwert der Deckungsrückstellung gerichtet, wobei sich zu dessen Berechnung bisher keine einheitliche Vorgangsweise durchgesetzt hat. Wüthrich et al. (2007) schlagen die Verwendung von Deflatoren-Modellen vor, gehen bei der Anwendung dieser Modelle für die Bewertung allgemeiner Lebensversicherungen jedoch nicht ins Detail.

Baur (2009) gibt eine Darstellung der marktkonsistenten Bewertung von versicherungstechnischen Rückstellungen im Rahmen des Konzeptes des Market Consistent Embedded Values (MCEV). Obwohl beim MCEV der Unternehmenswert aus Eigentümersicht bestimmt werden soll, gibt es in der Methodik der Ermittlung des Best Estimates der Rückstellungen keine Unterschiede in der Konzeption zur vorliegenden Arbeit. Die beim MCEV-Konzept auftretenden Kosten aus Sicht der Eigentümer entfallen hier jedoch.

Gaillardetz (2008) analysiert mit Hilfe von stochastischen Zinssätzen im Rahmen eines Zinsbaummodells die Marktwerte von variable annuities unter Berücksichtigung eingebetteter Finanzgarantien, wobei als Spezialfall ein Einmalerlag angenommen wird. Daneben werden auch Sensitivitätsstudien des Preises bezüglich einer Veränderung von Zinssatz, Laufzeit und Zinsvolatilität durchgeführt.

Die Arbeit von Börger (2010) hingegen beleuchtet das Langlebigkeitsrisiko in einem aufgeschobenen Rentenvertrag, wobei auch Zinsrisiken mitberücksichtigt werden. Zusätzlich erfolgt eine Abschätzung der Höhe der sogenannten Risk Margin aufgrund des Langlebigkeitsrisikos.

Schließlich vergleicht O'Brien (2007) die Ergebnisse von britischen Lebensversicherungen in Bezug auf die Höhe der Marktwerte und kommt zu entscheidenden Differenzen bei den Ergebnissen für den Wert eingebetteter Finanzoptionen, je nach verwendetem Economic Scenario Generator. Zur Berechnung der Marktwerte eines Bestandes auf Basis wahrscheinlichkeitsgewichteter zukünftiger Cashflows wurden durchwegs Modelpoints verwendet, wobei die Anzahl dieser Modellverträge im Vergleich zum Gesamtbestand nur rund 3 % betrug. Nicht zuletzt durch die gestiegene Rechenleistung kann heutzutage selbst ein größerer Bestand auf Einzelvertragsbasis berechnet werden, um auch die Vergleichbarkeit und Prüfung der Ergebnisse anhand des schon bekannten Buchwertes zu ermöglichen. Der Formalismus selbst, welcher die Möglichkeit zur Berechnung von Marktwerten für die versicherungstechnischen Verbindlichkeiten gibt, ist jedoch kein Thema der Arbeit von O'Brien.

Bislang wurde in der Literatur auch kaum das künftige Verhalten des Versicherungsnehmers (z.B. Storno) berücksichtigt, welches aber den erwarteten Cashflow entscheidend modifizieren und damit den Marktpreis beachtlich verändern kann. Zusätzlich ist das Zusammenspiel der wichtigsten Parameter, welche den Marktwert beeinflussen (Zinsen, Sterblichkeit, Storno, Beitragsfreistellung, etc.) am ehesten in einem geschlossenen Formelwerk sichtbar, welches idealerweise aus einer Erweiterung des bestehenden aktuarischen Formelwerkes zur Buchwertberechnung hervorgehen sollte.

Der Inhalt dieses Beitrages besteht in der Darstellung dieser Formeln für die Marktwertberechnung und der Anwendung anhand von Beispielen, wobei anhand von Mustertarifen Sensitivitätsanalysen bezüglich der wesentlichen Einflussgrößen (Zinsen, Sterblichkeit, Storno, Gewinnbeteiligung) durchgeführt werden. Der Vergleich mit den entsprechenden Buchwerten zeigt das Ausmaß der Veränderung beim Übergang von der HGB-Sicht (in Österreich UGB) zur Solvency-II-Sicht und lässt ein tieferes Verständnis für die Zusammenhänge zu.

In der vorliegenden kompakten Form ist in der Literatur noch keine Darstellung von Formeln zur Marktwertberechnung erfolgt, somit stellt diese Arbeit einen Startpunkt für eine umfassende aktuarische Behandlung der Marktwertberechnung Leben dar. Darüber hinaus liefert dieser Beitrag auch einen konkreten Leitfaden für die praktische Anwendung, insbesondere für Solvency II und in der Folge auch für IFRS.

Die ergebniskritischen Inputfaktoren werden für alle Unternehmen die individuellen Rechnungsgrundlagen 2. Ordnung sein, welche sorgsam aus unternehmensinternen oder auch allgemein zugänglichen statistischen Daten hergeleitet werden müssen, um glaubwürdige Ergebnisse zu erhalten.

Deutsche und österreichische Regeln zur Bildung und Kalkulation der versicherungstechnischen Rückstellungen sind fast identisch, die geringfügigen Unterschiede bei der Bemessungsgrundlage für die Gewinnbeteiligung (hier wird in Deutschland zwischen den verschiedenen Ertragsarten unterschieden, in Österreich ist dies nicht der Fall) machen keine Änderung der Methode erforderlich.

Die Arbeit ist wie folgt strukturiert: In Abschn. 2 werden die verwendeten Begriffe definiert und erläutert, Abschn. 3 umfasst das Formelwerk zu den Marktwerten der Deckungsrückstellung und gibt einen Vergleich zu den Berechnungen auf Buchwertbasis. Anhand einiger Beispiele werden in Abschn. 4 die Unterschiede zwischen Buch- und Marktwerten analysiert und die Auswirkung der Szenarien aus dem Standardmodell der Quantitative Impact Studies (QIS) auf den Marktwert untersucht. Abschnitt 5 behandelt die Problematik der Schätzung von Storno- und Sterblichkeitsverhalten. Eine abschließende Zusammenfassung wird in Abschn. 6 gegeben.

2 Begriffsdefinitionen

Im Nachfolgenden wird ein Überblick über die verwendeten Begriffe im Zusammenhang mit Solvency II und der Berechnung von Marktwerten der Deckungsrückstellung gegeben.

Die *Buchwerte der Deckungsrückstellung* beziehen sich jeweils auf einen Bilanzstichtag und beschreiben den Ist-Zustand der versicherungstechnischen Verbindlich-

keiten. Die *Marktwerte* (oder *Best Estimates*¹) beziehen im Gegensatz dazu künftige Wertentwicklungen der Reserven und Gewinne mit ein. Dadurch können Best Estimate Verlaufswerte, wie Reserven, Prämienverläufe oder Gewinnentwicklungen, nicht unter den gleichen Annahmen berechnet werden wie Buchwerte. Dies würde implizit dazu führen, dass künftige Entwicklungen unter der Prämisse bewertet werden, dass der Versicherungsnehmer (VN) entsprechend der Sterbetafel stirbt und den Vertrag weder prämienfrei stellt noch storniert.

Diese Annahmen spiegeln jedoch nicht die Realität wider, da jährlich ein gewisser Prozentsatz der Verträge aus dem System ausscheidet, wobei das Ausscheiden aus dem System durch Tod oder Sorno definiert ist. Um dieser Tatsache gerecht zu werden, sind Wahrscheinlichkeiten für Sorno- und Prämienfreistellungsverhalten, sowie die reale Sterblichkeit im Versicherungsportfolio zu berücksichtigen. Das Schätzen dieser Wahrscheinlichkeiten ist eine der großen Herausforderungen an die Versicherungsunternehmen im Rahmen von Solvency II. In dieser Arbeit werden die Wahrscheinlichkeiten als gegeben angenommen und mit diesen die Best Estimates der Deckungsrückstellung berechnet.

Eine Diskussion über das Modellieren von Sorno- und Sterblichkeitsverhalten, sowie die Schätzung der Zinskurvenstruktur für lange Laufzeiten findet sich in Abschn. 5.

Sind die Ausscheideordnungen aus dem System bekannt, kann die Vertragssumme² anhand dieser Wahrscheinlichkeiten in jedem Jahr vermindert werden:

$$\begin{aligned} VS_t &= VS_{t-1} \cdot p_{x+t}^{\text{mod}} \\ p_{x+t}^{\text{mod}} &= 1 - q_{x+t}^{\text{mod}} \\ &= (1 - q_{x+t}) \cdot (1 - q_t^{\text{st}}), \end{aligned} \quad (1)$$

wobei die Sterbewahrscheinlichkeit q_{x+t} die reale Sterblichkeit widerspiegelt (siehe hierzu Definition 3.3) und q_t^{st} die Sornowahrscheinlichkeit in Jahr t beschreibt. Für eine allgemeine Definition der Sterbewahrscheinlichkeit wird hier auf Bowers et al. (1986) verwiesen.

Eine Prämienfreistellung führt zwar nicht zu einem Ausscheiden aus dem System, allerdings zu einer Veränderung der künftigen Verlaufswerte. Um dem Rechnung zu tragen und die Option der Prämienfreistellung zu bewerten, werden bedingte Erwartungswerte der Verlaufswerte berechnet, siehe hierzu Bemerkung 3.4.

Die *Deckungsrückstellung zu Marktwerten* setzt sich – analog zur Deckungsrückstellung zu Buchwerten – aus mehreren Bestandteilen zusammen, i.e. die mathematische Reserve zu Marktwerten, der Barwert der künftigen Gewinne, der Barwert der Sorno- und der Kostengewinne.

¹ Entsprechend den QIS Technical Specifications (siehe z.B. CEIOPS 2010) ist der Best Estimate gleich dem wahrscheinlichkeitsgewichteten Durchschnitt der künftigen Zahlungsströme, wobei zur Diskontierung die risikolose Zinskurve (plus eventuellem Liquiditätsaufschlag) zu verwenden ist. Die Berechnung hat auf Basis glaubwürdiger Informationen und realistischer Annahmen zu erfolgen. Aktuarielle Methoden und statistische Techniken werden vorausgesetzt.

² Für kapitalbildende Versicherungen ist dies die Versicherungs- oder die Prämiensumme, für Rentenversicherungen in der Leistungsphase handelt es sich um die Jahresrente.

Die Berechnung der *mathematischen Reserve zu Marktwerten* folgt aktuarischen Methoden (siehe z.B. Bowers et al. 1986), wobei der entscheidende Unterschied darin besteht, dass nicht mit einem konstanten Rechnungszins diskontiert wird, sondern mit Zinssätzen einer gegebenen marktkonsistenten Spotkurve. Es ist allerdings essentiell zu beachten, dass sowohl die Leistung (= Versicherungssumme) als auch die Prämie (= vorgeschriebene Prämie für Kunden) fix sind. Die vorgeschriebene Prämie ist somit weiterhin mit dem Rechnungszins und der tariflichen Sterbetafel zu berechnen.

Im Gegensatz zur Deckungsrückstellung zu Buchwerten, die nur bereits zugesagte und zugeteilte Gewinne enthält, sind die Vorgaben bzgl. der Deckungsrückstellung zu Marktwerten weitreichender. Die *Marktwerte der künftigen Gewinne* beziehen alle künftigen Gewinne bereits zum betrachteten Bilanzstichtag mit ein. Für die Entwicklung der Gewinnbeteiligungen können unterschiedliche Annahmen getroffen werden. Beispielsweise kann die Gewinnbeteiligung eine Funktion der Spotkurve sein, oder auf ein minimales Niveau gesenkt werden.

Stornogewinne treten dort auf, wo die Leistung im Stornofall geringer ist als die dem Vertrag zustehende Deckungsrückstellung. Ist die Deckungsrückstellung geringer, werden die etwaigen Verluste durch Storno berechnet. Die Ausscheideordnung in diesem Fall umfasst nur die Stornowahrscheinlichkeit. Die *Barwerte der Stornogewinne* werden ebenfalls durch aktuarische Methoden berechnet.

Die *Barwerte der Kostengewinne* entstehen aus der Differenz von verrechneten zu tatsächlichen Kosten. Hier sind im Gegensatz zu den Stornogewinnen sowohl Tod als auch Storno relevant für die Berechnung der Ausscheideordnung.

3 Die Marktwertberechnung in Formeln

Zur Erläuterung der Berechnungsmethode für die Marktwerte der Deckungsrückstellung werden im Folgenden die Formeln exemplarisch für einen gemischten Er- und Ablebensvertrag auf ein Leben angeführt. Alle anderen Vertragstypen werden entsprechend dieses Beispiels in analoger Weise berechnet.

Obwohl im Folgenden auf österreichische Verhältnisse bei der Gewinnbeteiligung eingegangen wird, ist die Vorgangsweise für deutsche und schweizer Geschäftspläne ebenfalls anwendbar, da nach Bestimmung der künftigen Gewinnbeteiligungen, sowie Storno- und Kostengewinnen die u.a. Formeln direkt angewendet werden können.

Folgende Annahmen werden deshalb ohne Beschränkung der Allgemeinheit getroffen:

- Dem Gewinn liegt ein Ansammlungssystem zugrunde, wobei eine Gewinnkarenz von einem Jahr besteht und der Zusatzgewinn an der Versicherungssumme bemessen wird. Des weiteren wird angenommen, dass die Reserve einer Zillmerung unterliegt.
- Zusätzlich seien die Spotraten zum Jahresultimo des Bilanzjahres, sowie die Ausscheideordnungen (reale Sterblichkeit, Storno- und Prämienfreistellungswahrscheinlichkeiten) für diesen Vertragstyp bekannt.

Tab. 1 Übersicht über die verwendeten Parameter

VS	Versicherungssumme
VL_{abl}	Versicherungsleistung im Ablebensfall
n	Laufzeit des Vertrags
$m \leq n$	Prämienzahlungsdauer
x	Alter der versicherten Person
t	Abgelaufene Zeit
α^{zi}	Zillmerkosten
i	Rechnungszins
r_t	Spotrate, die zum Zeitpunkt t verwendet wird
z_{zins}	Prozentsatz des Zinsgewinns
z_{zusatz}	Prozentsatz des Zusatzgewinns
$z_{schluss}$	Prozentsatz des Schlussgewinns
$z_{anges} = i + z_{zins}$	Gesamtverzinsung
q_t^{st}	Stornoquote zum Zeitpunkt t
q_t^{prfr}	Prämienfreistellungswahrscheinlichkeit zum Zeitpunkt t
q_x, p_x, l_x, D_x, N_x und M_x	Kommutationswerte, siehe hierzu Bowers et al. (1986) und Schmidt (2006).

Bemerkung 3.1 Liegt der Versicherungsbeginn vor dem Bilanzstichtag, wird die Spotkurve, wie im nachfolgenden Beispiel beschrieben, angepasst:

Sei der Versicherungsbeginn im Jahr 2002 und das Bilanzjahr sei 2008, dann wird der erste Wert der Spotkurve (der kurzfristige Zinssatz für 2008) erst im 6. Vertragsjahr angewendet. Davor wird die Spotkurve 0 gesetzt. Die (positive) Differenz zwischen Bilanzjahr und Versicherungsbeginn wird in weiterer Folge mit Δ bezeichnet.

Tabelle 1 umfasst alle im Weiteren verwendeten Parameter und verweist auf die entsprechende Literatur.

Es werden nun zunächst die verwendeten Leistungs- und Prämienbarwerte auf Buchwertbasis beschrieben und die mathematische Reserve sowie alle Gewinnkomponenten definiert. Im Anschluss werden die Formeln zur Bestimmung des Marktwertes adaptiert und die Barwerte der künftigen Gewinne, Storno- und Kostengewinne angeführt.

Definition 3.1 Der Leistungsbarwert der gemischten Er- und Ablebensversicherung wird in weiterer Folge mit $AE_{x:\overline{n}|}$, der Leistungsbarwert der Ablebensversicherung mit $A_{x:\overline{n}|}$ und jener der Erlebensversicherung mit $E_{x:\overline{n}|}$ bezeichnet. Der Rentenbarwert wird mit $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ bezeichnet. Die Barwerte berechnen sich auszugsweise, wie folgt

$$\begin{aligned}
 AE_{x:\overline{n}|} &= \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x} \\
 \ddot{a}_{x:\overline{n}|} &= \frac{D_x + \dots + D_{x+n-1}}{D_x} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Die gezillmerte Nettoprämie ${}_m P_{x:\overline{n}|}^{zi}$ wird mittels

$${}_m P_{x:\overline{n}|}^{zi} = \frac{AE_{x:\overline{n}|} + \alpha^{zi}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}$$

berechnet.

Die prämienpflichtige Reserve ergibt sich aus der Differenz der Barwerte zukünftiger Leistungen und der Barwerte zukünftiger Prämien. Im Falle der prämienfreien Reserve entfallen die zukünftigen Prämien, und die Berechnung reduziert sich auf den Leistungsbarwert.

Die Reserve in diesem Beispiel ist die gezillmerte Nettoreserve.

$${}_t V_{x:\overline{n}|} = AE_{x+t:\overline{n-t}|} - {}_m P_{x:\overline{n}|}^{zi} \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|},$$

wobei ${}_m P_{x:\overline{n}|}^{zi} = 0$ für $m \leq t < n$.

Bemerkung 3.2 Wird nicht die Netto- sondern die Bruttoreserve (inkl. Kosten) berechnet, so kann der nachfolgende Ansatz dennoch in gleicher Weise verwendet werden. Die aktuarischen Barwerten werden an den entsprechenden Stellen durch die Kosten ergänzt.

Definition 3.2 Die folgenden Formeln für das Ansammlungssystem sind exemplarisch und u.U. vereinfacht dargestellt.

Der *Zinsgewinn* berechnet sich auf Basis der Reserve und des Überzinses (Gesamtverzinsung minus Rechnungszins):

$$\text{gew}_{\text{zins}}(t) = {}_{t-1} V_{x:\overline{n}|} \cdot v \cdot z_{\text{zins}},$$

wobei $v = (1+i)^{-1}$ der Diskontfaktor bzgl. des Rechnungszins ist.

Der *Zusatzgewinn* berechnet sich an der jeweiligen Ablebensleistung³:

$$\text{gew}_{\text{zusatz}}(t) = V L_{\text{abl}} \cdot z_{\text{zusatz}}.$$

Der *Schlussgewinnanteil* errechnet sich analog zum Zinsgewinn, wobei jedoch an Stelle der um ein Jahr zurückliegenden Versicherungsperiode, die des letzten Jahres herangezogen wird und eine Aufzinsung unterbleibt:

$$\text{gew}_{\text{schluss}}(t) = {}_t V_{x:\overline{n}|} \cdot v \cdot z_{\text{schluss}}, \quad \text{wenn } t = n,$$

ansonsten ist $\text{gew}_{\text{schluss}}(t) = 0$. Sind Erlebensleistungen während der Laufzeit vorgesehen, so kann der Schlussgewinn $\text{gew}_{\text{schluss}}(t) > 0$ für $t < n$ sein.

Der *angesammelte Gewinn* schließlich fasst alle Gewinnteile zusammen und wird jedes Jahr mit der Gesamtverzinsung aufgezinst.

$$\begin{aligned} \text{gew}_{\text{anges}}(t) &= \text{gew}_{\text{anges}}(t-1) \cdot (1 + z_{\text{anges}}) + (\text{gew}_{\text{zins}}(t) + \text{gew}_{\text{zusatz}}(t)) \\ &\quad \cdot (1 + z_{\text{anges}}) + \text{gew}_{\text{schluss}}(t). \end{aligned}$$

³Im Fall einer gemischten Er- und Ablebensversicherung entspricht die Ablebensleistung der vereinbarten Versicherungssumme.

Um die oben beschriebene Versicherungsmathematik für die Berechnung der Marktwerte zu adaptieren, ist der zentrale Schritt der Übergang vom Rechnungszins zu den Spotrates für die Berechnung der Kommutationszahlen.

Definition 3.3 Als Grundlage dienen die Spotkurve zum Bilanzstichtag sowie die tarifliche Sterbetafel. Neben möglicher Zu- bzw. Abschläge kann die Sterbetafel auch durch eine Altersverschiebung oder eine andere Transformation (siehe hierzu u.a. Kainhofer et al. 2006) auf den einzelnen Versicherungsvertrag angepasst werden. Davon ausgehend, unter Berücksichtigung der realen Sterblichkeit⁴ und eines möglichen Auseinanderfallens von Versicherungsbeginn und Bilanzjahr, werden die Kommutationszahlen wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned} q_x &= q_x^{\text{shift}} + q_x^{\text{faktor}} \cdot q_x \\ p_x &= 1 - (q_x^{\text{shift}} + q_x^{\text{faktor}} \cdot q_x) \\ q_x^{\text{mod}} &= 1 - (1 - q_x) \cdot (1 - q_x^{\text{st}}) = q_x + q_x^{\text{st}} - q_x \cdot q_x^{\text{st}} \\ p_x^{\text{mod}} &= (1 - q_x) \cdot (1 - q_x^{\text{st}}) \\ l_x &= l_{x-1} \cdot q_{x-1} \\ d_x &= l_x - l_{x+1} \\ D_x &= \frac{l_x}{(1 + r_x)^{x-\Delta}}, \end{aligned}$$

wobei r_x bereits, wie in Bemerkung 3.1 beschrieben, verschoben ist und Δ die Differenz zwischen Bilanzjahr und Abschlussjahr angibt.

$$\begin{aligned} C_x &= \frac{d_x}{(1 + r_{x+1})^{x+1-\Delta}} \\ N_x &= D_x + D_{x+1} + \dots + D_\omega \\ M_x &= C_x + C_{x+1} + \dots + C_\omega \end{aligned}$$

Aus diesen Kommutationszahlen können die Leistungs- und Rentenbarwerte wie in der klassischen Versicherungsmathematik berechnet werden (siehe Formel (2)).

Kommen die Kommutationswerte nicht direkt zu Anwendung, können die Barwerte auch auf folgende Weise berechnet werden.⁵

$$\begin{aligned} AE_{x+t:\overline{n-t}|} &= \sum_{i=0}^{n-t} \left({}_i p_{x+t} \cdot \frac{v(r_{(x+t)+i})^{t+i}}{v(r_{x+t})^t} \cdot erl_{t+i} \right) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{n-t} \left({}_i p_{x+t} \cdot q_{x+t+i} \cdot \frac{v(r_{(x+t)+i+1})^{t+i+1}}{v(r_{x+t})^t} \cdot abl_{t+i} \right), \end{aligned}$$

⁴In dieser Arbeit wird die reale Sterblichkeit als lineare Transformation der tariflichen Sterbetafel bestimmt. Diese Vorgangsweise ist vor allem bei neuen Sterbetafeln gerechtfertigt, da dadurch der Sicherheitszuschlag aus den Mortalitätsraten herausgerechnet wird.

⁵Wir beschränken uns hier wiederum auf den Fall der gemischten Er- und Ablebensversicherung.

wobei ${}_i p_{x+t} = \prod_{j=0}^{t-1} p_{x+j}$, $v(r) = (1+r)^{-1}$ und erl_t bzw. abl_t die Leistung im Er- bzw. Ablebensfall zum Zeitpunkt t beschreiben. Im Fall einer Er- und Ablebensversicherung gilt:

$$erl_t = \begin{cases} 0, & t < n \\ 1, & t = n \end{cases} \quad \text{und} \quad abl_t = \begin{cases} 1, & t < n \\ 0, & t = n \end{cases}. \quad (3)$$

Bemerkung 3.3 Je nach Beschaffenheit der Zahlungsströme kann auch bei den Rentenbarwerten eine Berechnung ohne Kommutationszahlen sinnvoll bzw. auch notwendig sein. Dies gilt z.B. für Kreditrestschuldversicherungen (mit gestaffelter bzw. allgemeiner variabler Leistung) oder auch für liquide Renten. In diesem Fall ändert sich der Rentenbarwert in Formel (2) auf folgende Weise:

$$\begin{aligned} g\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}^k &= \sum_{i=0}^{n-t} \left({}_i p_{x+t} \cdot \frac{(v(r_{x+t+i}) \cdot (1+\delta))^{t+i}}{(v(r_{x+t}) \cdot (1+\delta))^t} \cdot vec_{t+i} \right) \\ &\quad - k \cdot ({}_g p_{x+t} \cdot (v(r_{x+t}) \cdot (1+\delta))^{g-t}) \\ &\quad - {}_{n-t} p_{x+t} \cdot (v(r_{x+t}) \cdot (1+\delta))^{n-t}, \end{aligned}$$

wobei g die Dauer der garantierten Rentenauszahlung und ${}_g p_{x+t}$ die kumulierte Erlebenswahrscheinlichkeit während der Garantiezeit g beschreibt. Der Wert δ ermöglicht eine jährlich steigende Rentenauszahlung (vergleiche hierfür beispielsweise mit der Riesterreute in Deutschland). Der Faktor k bezeichnet den Prozentsatz der Rente, der an die hinterbliebene Person übergeht. Der Vektor vec_t wird während der Garantiedauer auf 0 und danach auf 1 gesetzt. Dadurch wird die korrekte Zusammensetzung der Barwerte gewährleistet.

Definition 3.4 Mit den obigen Definitionen der Leistungs- und Rentenbarwerte kann die Reserve zu Marktwerten analog zur klassischen Versicherungsmathematik berechnet werden. Es gilt

$${}_t V_{x:\overline{n}|}^{mw} = A E_{x+t:\overline{n-t}|} - {}_m^i P_{x:\overline{n}|}^{zi} \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}, \quad (4)$$

wobei hier zu beachten ist, dass die gezillerte Nettoprämie ${}_m^i P_{x:\overline{n}|}^{zi}$ mit dem Rechnungszins i kalkuliert wird und nur die Leistungs- und Rentenbarwerte die Spotkurve verwenden.

Die Berechnung der Gewinn-, Storno- und Kostenbarwerte folgt in allen drei Fällen dem gleichen Prinzip:

Für alle künftigen Jahre werden die Zahlungsströme berechnet und je nach Typ als Leistungs- oder Rentenbarwert behandelt. Die Gewinne in der Zukunft werden im Storno-, sowie Ab- oder Erlebensfall ausbezahlt. Damit kann der Gewinnbarwert wie der Leistungsbarwert einer gemischter Er- und Ablebensversicherung berechnet werden, wobei die Leistung variabel ist.

Etwaige Stornogewinne bzw. -verluste fallen dann an, wenn der VN während der Laufzeit storniert (d.h. aus dem System ausscheidet). Somit entspricht der Stornobarwert einem reinen Ablebensbarwert, der variable Zahlungen berücksichtigt.

Die Kostengewinne fallen während der gesamten Prämienzahlungsdauer jährlich an. Dies entspricht einem Rentenbarwert, der wiederum mit variablen Zahlungen kalkuliert wird.

Die Berechnung dieser Barwerte wird im Folgenden durch Formeln beschrieben:

Definition 3.5 Seien abl_t und erl_t die definierenden Vektoren für die Ab- und Erlebensleistung zum Zeitpunkt t (siehe hierzu Formel (3)) und sei gew_t der dem VN zustehende Gewinn zum Zeitpunkt t , dann berechnet sich der Barwert der zukünftigen Gewinne $AE_{x+t:n-t}^{gew}$ mittels

$$AE_{x+t:n-t}^{gew} = \sum_{i=0}^{n-t} \left({}_i p_{x+t}^{\text{mod}} \cdot \frac{v(r_{(x+t)+i})^{t+i}}{v(r_{x+t})^t} \cdot gew_{t+i} \cdot erl_{t+i} \right) + \sum_{i=0}^{n-t} \left({}_i p_{x+t}^{\text{mod}} \cdot q_{x+t+i}^{\text{mod}} \cdot \frac{v(r_{(x+t)+i+1})^{t+i+1}}{v(r_{x+t})^t} \cdot gew_{t+i} \cdot abl_{t+i} \right).$$

Definition 3.6 Sei q_t^{st} die Stornowahrscheinlichkeit zum Zeitpunkt t und gew_t^{rkf} die Differenz aus Deckungsrückstellung mit variabler Gewinnbeteiligung und Stornoleistung (Rückkaufswert inkl. angesammeltem Gewinn mit variabler Zinszuschreibung), dann wird der Barwert der Stornogewinne $A_{x+t:n-t}^{rkf}$ durch

$$A_{x+t:n-t}^{rkf} = \sum_{i=0}^{n-t} \left({}_i p_{x+t}^{\text{mod}} \cdot q_{t+i}^{\text{st}} \cdot \frac{v(r_{(x+t)+i+1})^{t+i+1}}{v(r_{x+t})^t} \cdot gew_{t+i}^{rkf} \right)$$

bestimmt.

Definition 3.7 Sei gew_t^{cost} die Summe aller Gewinne aus Abschluss-, Inkasso- und Verwaltungskosten, dann berechnet sich der Barwert der Kostengewinne $\ddot{a}_{x+t:n-t}^{\text{cost}}$ mittels

$$\ddot{a}_{x+t:n-t}^{\text{cost}} = \sum_{i=0}^{n-t} \left({}_i p_{x+t}^{\text{mod}} \cdot \frac{v(r_{(x+t)+i})^{t+i}}{v(r_{x+t})^t} \cdot gew_{t+i}^{\text{cost}} \right).$$

Der Marktwert der Deckungsrückstellung $\text{DRSt}^{mw}(t)$ ergibt sich schließlich aus folgender Formel

$$\text{DRSt}^{mw}(t) = {}_t V_{x:n}^{mw} + AE_{x+t:n-t}^{gew} - A_{x+t:n-t}^{rkf} - \ddot{a}_{x+t:n-t}^{\text{cost}}. \quad (5)$$

Bemerkung 3.4 Da es sich bei Formel (5) bereits um die Best Estimate Rückstellung handelt, sind aus Konsistenzgründen wahrscheinlichkeitsgewichtete Verlaufswerte in der Berechnung der unterschiedlichen Barwerte zu verwenden. Dies bedeutet zum einen, dass die realistischen Ausscheideordnungen für Tod und Storno angewendet werden (siehe Formel (1) für ${}_t p_x^{\text{mod}}$) und zum anderen, dass die Prämienfreistellung (innerer Wert) berücksichtigt wird.

Um die Prämienfreistellung in den künftigen Zahlungsströmen korrekt bewerten zu können, wird folgende Methodik auf Einzelvertragebene herangezogen:

In jedem Jahr wird ein bedingter Erwartungswert für die Prämienfreistellung berechnet. Dafür wird entsprechend der vorgegebenen Wahrscheinlichkeit q_i^{prfr} ein Teil des Vertrags künstlich prämienfrei gestellt.⁶ Der unveränderte Anteil des Vertrags durchläuft im darauffolgenden Jahr die gleiche Methodik. Um die wahrscheinlichkeitsgewichteten Verlaufswerte zu erhalten, werden die unveränderten und die prämienfreigestellten Teile unter Berücksichtigung der jeweiligen Wahrscheinlichkeit zusammengeführt.

Die nachfolgenden Formeln werden für jeden Vertrag angewendet. Zur Veranschaulichung wird die Vorgangsweise anhand der mathematischen Reserve illustriert.

Das versicherungstechnische Alter x des VN wird auf $x + t$ erhöht, wobei t der Betrachtungszeitpunkt ist. Gleichzeitig werden die Prämienzahlungsdauer auf $m = 0$ und die Laufzeit auf $n - t$ reduziert. Der Reduktionswert zum Zeitpunkt t gibt die neue Versicherungssumme an. Mit diesen neuen Parametern werden die prämienfreigestellten Verlaufswerte berechnet.

Die prämienfreigestellte Reserve wird mit ${}_{t,s}V_{\tilde{x}:\tilde{n}}^{\text{prfr}}$ bezeichnet. Der Wert \tilde{x} repräsentiert das Alter zum Zeitpunkt der Prämienfreistellung t (klarerweise gilt $\tilde{x} = x + t$), \tilde{n} bezeichnet die reduzierte Laufzeit des Vertrags und s ist die neue Zeitvariable. Um den Erwartungswert zum Zeitpunkt t zu berechnen, wird die Wahrscheinlichkeit, dass der Vertrag bis zum Zeitpunkt t nicht prämienfreigestellt geworden ist (${}_t p^{\text{prfr}}$), wie folgt bestimmt

$${}_t p^{\text{prfr}} = \prod_{i=0}^{t-1} (1 - q_i^{\text{prfr}}).$$

Damit kann der Erwartungswert der mathematischen Reserve durch

$${}_s V_{x:\overline{n}} \cdot {}_s p^{\text{prfr}} + \sum_{i=t}^s {}_{i,s} V_{\tilde{x}:\tilde{n}}^{\text{prfr}} \cdot {}_i p^{\text{prfr}} \cdot q_i^{\text{prfr}}$$

berechnet werden, wobei der zweite Teil der Formel die prämienfreigestellte Reserve zu jedem Zeitpunkt wahrscheinlichkeitsgewichtet.

4 Die Sensitivität des Marktwertes auf Szenarien im QIS-Standardmodell

Das Standardmodell für Solvency II, welches zur Zeit im Rahmen der QIS zur Anwendung kommt, basiert auf einem Szenario-orientierten Ansatz. Die Risiken für ein Versicherungsunternehmen werden in Gruppen geteilt,⁷ wobei jede Risikogruppe in mehrere Klassen untergliedert wird. Jeder dieser Klassen werden im Standardmodell

⁶Die Prämienfreistellung hat Auswirkung auf alle Verlaufswerte.

⁷Diese Gruppen umfassen das Marktrisiko, das versicherungstechnische Risiko für Leben, Nichtleben und Kranken, das Default-Risiko sowie das Illiquiditätsrisiko.

Tab. 2 Gemischte Er- und Ablebensversicherung: abgelaufene Zeit 7 Jahre

Versicherungsbeginn:	01.01.2002	Bilanzstichtag:	31.12.2008
Geburtsdatum VP:	01.01.1980	Laufzeit:	30 Jahre
Prämienzahlungsdauer:	30 Jahre	Versicherungssumme:	50.000.–
Rechnungszins:	2,25 %	Gesamtverzinsung:	4,375 %
Sterbetafel:	AVÖ 2000/2002		
Reale Kosten:	80 % der tarifl.	Reale q_x :	80 % der tarifl.
Storno-Wk:	1 % pro Jahr	Prämienfrei St.-Wk:	1,5 % pro Jahr

Szenarien zugeteilt, unter denen der Marktwert der Deckungsrückstellung berechnet wird. Die Veränderung des Marktwerts der Deckungsrückstellung und der Aktivseite unter Berücksichtigung der jeweiligen Szenarien liefert in jeder Risikoklasse den sogenannten Delta Net-Asset-Value oder DeltaNAV. Dieses Maß ist in weiterer Folge Input für die Berechnung des Solvency Capital Requirements (SCR).

Im Folgenden werden die Marktwerte der Deckungsrückstellung für einige Beispiele anhand der oben beschriebenen Methodik berechnet und die Sensitivitäten auf das Mortalitätsrisiko, das Zinsänderungsrisiko und das Stornorisiko analysiert. Betrachtungszeitpunkt ist jeweils der Bilanzstichtag 31.12.2008, es werden die Zinskurven und Szenarien laut QIS4.5 angewendet. Die Ergebnisse für die gemischte Er- und Ablebensversicherung beziehen sich auf die in Tab. 2 zusammengefassten Parameter.

4.1 Beispiel 1

Die Deckungsrückstellung zu Buchwerten (durchgehende Linie) wird in Abb. 1 mit dem Marktwert unter Annahme einer gleichbleibenden Gewinnbeteiligung (strichlierte Linie) und mit dem Marktwert unter Annahme einer Minimalverzinsung (gepunktete Linie) verglichen.⁸ Hier fällt sofort auf, dass der Marktwert mit gleichbleibender Gewinnbeteiligung bedeutend höher ist als der Buchwert. Dies ist der Fall, da die Spotraten zum Ultimo 2008 immer unter der Gewinnbeteiligung von 4.375 % liegen.⁹

Der Marktwert mit Minimalverzinsung liegt unter dem Buchwert, da hier nur noch der Rechnungszins von 2.25 % zugeschrieben wird. Allerdings handelt es sich hier um eine artifizielle untere Schranke, da die Versicherungsunternehmen zum einen durch die österreichische Gewinnbeteiligungs-Verordnung (GBVVU 2006) und zum anderen durch die notwendige Wettbewerbsfähigkeit angehalten sind, eine Gewinnbeteiligung über dem Rechnungszins zuzuschreiben. Für Deutschland gibt es diesbezüglich ähnliche Vorgaben zur Überschussbeteiligung, siehe hierzu das BVerfG aus dem Jahr 2005 und darüber hinausgehend die VVG-Reform im Jahr 2008.

Da weder die gleichbleibende Gewinnbeteiligung noch die Mindestverzinsung realistische Annahmen sind, haben wir festgesetzt, dass sich die künftige Gewinnbeteiligung am 1-Jahres-Forward der risikolosen Zinskurve orientieren soll, womit eine

⁸Die Deckungsrückstellung zu Buchwerten geht (in Übereinstimmung mit dem Geschäftsplan) stets von einer gleichbleibenden Gewinnbeteiligung aus.

⁹Siehe hierzu die Term Structures für QIS4.5 der österreichischen FMA.

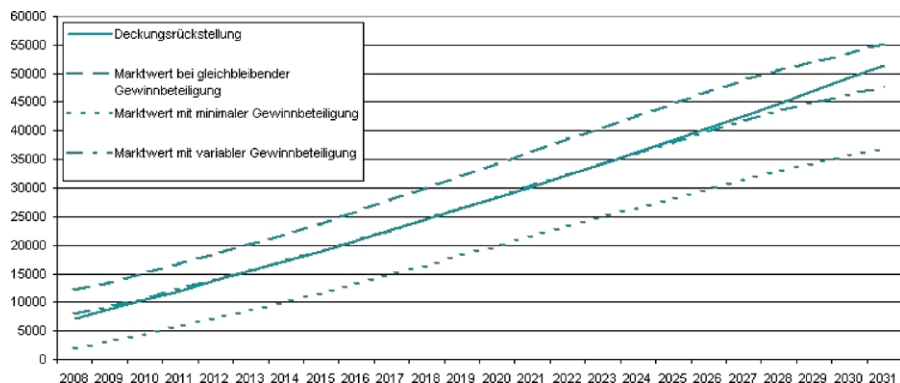


Abb. 1 Gemischte Er- und Ablebensversicherung: Versicherungsbeginn 2002

risikolose Veranlagung der Folgeprämien unterstellt wird. In den Abb. 1 und 2 wurden 85 % der Differenz von 1-Jahres-Forward und Rechnungszins als Überschussbeteiligung dem Vertrag gutgeschrieben.¹⁰ Der zugehörige Marktwert ist in der Abbildung mit einer strichpunktierten Linie dargestellt.

Es fällt auf, dass die Deckungsrückstellung zu Buchwerten und der Marktwert mit variabler Verzinsung zu Beginn beinahe identisch sind. Dies resultiert aus der Höhe der Forward-Sätze, die zu Beginn in etwa der Gewinnbeteiligung von 4.375 % entsprechen und erst später sinken.

Die nachfolgenden Tabellen geben eine Übersicht über die Veränderungen der Marktwerte zum Bilanzstichtag 2008 auf Basis der Szenarien im QIS-Standardmodell. Die betrachteten Risiken sind das Zinsänderungsrisiko, das Sterblichkeitsrisiko und das Stornorisiko, wobei jeweils up- und down-Szenarien kalkuliert werden. Für eine genaue Definition der Szenarien sei hier auf die Technical Specifications der CEIOPS (2008) für QIS4 verwiesen.

4.1.1 Zinsänderungsrisiko

Es fällt in Tab. 3 auf, dass die Marktwerte auf das down-Szenario stärker reagieren. Dies ist deshalb der Fall, da auch die Zahlungsströme der Passivseite durch eine bestimmte Duration und Komplexität gekennzeichnet sind und darüber hinaus das Zinsänderungsrisiko nicht symmetrisch definiert ist. Außerdem ist zu bemerken, dass die Schwankungen des Marktwerts mit variabler Gewinnbeteiligung weniger ausgeprägt sind als mit Annahme einer konstanten Gewinnbeteiligung. Durch die Koppelung der künftigen Gewinnzuschreibung an den 1-Jahres-Forward werden die Änderungen der Zinskurve an die Versicherungsnehmer zum Teil weitergegeben und dadurch der Effekt im Marktwert abgeschwächt.

¹⁰Die 85 % orientieren sich an der GBVVU 2006.

Tab. 3 Marktwerte der Deckungsrückstellung unter Einfluss des Zinsänderungsrisikos

Szenario	MW mit gleichbleibender Gewinnbeteiligung	MW mit variabler Gewinnbeteiligung	MW mit Minimalverzinsung
Ist	12064,24	7931,64	1870,75
Down	19025,38	9977,30	5793,99
Up	6223,83	6664,73	−1274,29

Tab. 4 Marktwerte der Deckungsrückstellung unter Einfluss des Sterblichkeitsrisikos

Szenario	MW mit gleichbleibender Gewinnbeteiligung	MW mit variabler Gewinnbeteiligung	MW mit Minimalverzinsung
Ist	12064,24	7931,64	1870,75
Down	12045,11	7905,82	1839,33
Up	12178,72	8085,80	2058,50

4.1.2 Sterblichkeitsrisiko

In Tab. 4 ist zu beobachten, dass bei sinkender Sterblichkeit der Marktwert ebenfalls geringer wird. Da es sich in diesem Beispiel um eine gemischte Er- und Ablebensversicherung handelt, fällt durch das geringere Sterblichkeitsrisiko weniger Reservierungsbedarf an. Bei einer erhöhten Sterblichkeit ist genau der gegenteilige Effekt zu beobachten.

Es fällt ebenso auf, dass die Änderung der Sterblichkeit bei geringerer Gewinnbeteiligung größere Auswirkungen hat. Bei gleichbleibender Gewinnbeteiligung ändert sich der Marktwert um 0,16 %, wenn die Sterblichkeit reduziert wird. Für die Mindestverzinsung erhält man eine Änderung von 1,68 %. Ähnlich verhalten sich die Werte bei einer Steigerung der Sterblichkeit, hier ergibt sich für die variable Gewinnbeteiligung ein Wert von 1,94 % und für die Minimalzuschreibung sogar ein Wert von ca. 10 %. Dieser Effekt ist eine Folge der Berücksichtigung künftiger Gewinne. Den Gewinnen stehen, anders als den garantierten Leistungen, keine künftigen Prämieinnahmen gegenüber. Änderungen in der Sterblichkeit werden durch die zusätzlichen Leistungen verstärkt kompensiert und fallen damit bei geringer Gewinnbeteiligung stärker ins Gewicht.

4.1.3 Stornorisiko

Bei der Berechnung des Stornorisikos wird jeweils nur das Szenario angewendet, das zu einer Verschlechterung der Situation des Versicherungsunternehmens führt. In Falle einer positiven Auswirkung des Storno-Shocks wird dieser Effekt auf null gesetzt. Es wird die Stornoleistung zu Buchwerten mit dem Marktwert der Deckungsrückstellung verglichen: Ist die Leistung im Stornofall geringer als der Marktwert, kommt es zu einer Reduktion der Stornowahrscheinlichkeit um 50 %. Ist das Gegenteil der Fall, werden die Stornoannahmen pro Jahr um 50 % erhöht.

Tab. 5 Marktwerte der Deckungsrückstellung unter Einfluss des Stornorisikos

Szenario	MW mit gleichbleibender Gewinnbeteiligung	MW mit variabler Gewinnbeteiligung	MW mit Minimalverzinsung
Ist	12064,24	7931,64	1870,75
Down	12147,96	8013,58	1870,75
Up	12064,24	7931,64	1801,25

Im obigen Beispiel ist die Stornoquote im Fall von gleichbleibender und variabler Gewinnbeteiligung gesenkt worden, im Fall einer Minimalverzinsung wurde die Stornowahrscheinlichkeit erhöht (siehe hierzu Tab. 5). Bemerkenswert ist, dass trotz der Verschlechterung der Situation für das Versicherungsunternehmen, der Marktwert mit Mindestverzinsung dennoch sinkt. Dieser Effekt kann dadurch erklärt werden, dass die Erhöhung der Ausscheideordnung (Verringerung der Versicherungssumme) die Erhöhung des Stornobarwertes kompensiert.

Anhand des zweiten Beispiels wird demonstriert, wie sich künftige Gewinnzuschreibungen bereits im ersten Jahr des Vertrags auf die Marktwerte auswirken. Die Parameter sind in Tab. 6 zusammengefasst.

4.2 Beispiel 2

Der junge Vertrag in diesem Beispiel veranschaulicht die Problemstellungen zu Beginn eines Vertrags (Abb. 2): Einerseits liegt der Marktwert wieder deutlich über dem Buchwert, andererseits kann der Marktwert bei minimaler Verzinsung sogar negativ werden.

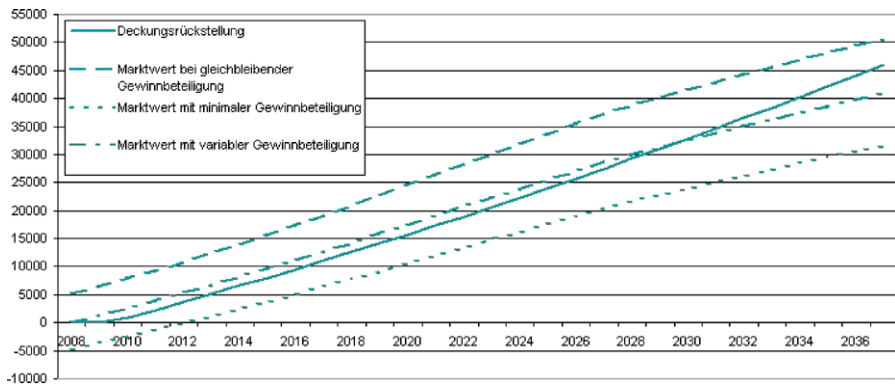
Der erhöhte Marktwert bei gleichbleibender Gewinnbeteiligung resultiert vor allem aus der Tatsache, dass die Gewinnbeteiligung höher als die Spotrate ist und damit nicht risikofrei erwirtschaftet werden kann. Somit entsteht am 1. Bilanzstichtag bereits ein Verlust, welcher sich in einem positiven Marktwert der Deckungsrückstellung widerspiegelt. Im Unterschied zum Buchwert müssen künftige Gewinne oder Verluste bereits im Marktwert eingepreist werden.

Der negative Marktwert zu Mindestverzinsung zu Beginn ist ebenfalls ein Ergebnis des herrschenden Zinsniveaus. Bei der Mindestverzinsung wird davon ausgegangen, dass künftig keine Gewinne über dem Rechnungszins ausgeschüttet werden und bereits vorhandene Gewinne nur noch mit eben diesem verzinst werden. Da die risikolose Zinskurve allerdings deutlich über dem Rechnungszins liegt, gibt es für die Versicherung keinen Bedarf zur Reservierung für die Deckung künftiger Schäden, da diese im Erwartungswert direkt aus den Zinseinnahmen am Kapitalmarkt und den Prämieinnahmen gedeckt werden können. Somit entsteht unter diesen Annahmen ein Gewinn, der sich in einem negativen Marktwert der Deckungsrückstellung äußert.

Ähnlich wie in Abb. 1 sind auch in diesem Beispiel der Marktwert mit variabler Gewinnbeteiligung und die Deckungsrückstellung zu Buchwert sehr ähnlich, was wiederum durch die Höhe der Forwards für kurze Restlaufzeiten anhand der Spotkurve erklärt wird. Die Tab. 7, 8, 9 geben eine Übersicht über die Veränderungen der Marktwerte zum Bilanzstichtag 2008 auf Basis der Szenarien im Standardmodell für dieses Beispiel.

Tab. 6 Gemischte Er- und Ablebensversicherung: im ersten Jahr

Versicherungsbeginn:	01.01.2008	Bilanzstichtag:	31.12.2008
Geburtsdatum VP:	01.01.1980	Laufzeit:	30 Jahre
Prämienzahlungsdauer:	30 Jahre	Versicherungssumme:	50.000.–
Rechnungszins:	2,25 %	Gesamtverzinsung:	4,375 %
Sterbetafel:	AVÖ 2000/2002		
Reale Kosten:	80 % der tarifl.	Reale q_x :	80 % der tarifl.
Storno-Wk:	1 % pro Jahr	PrämienfreiSt.-Wk:	1,5 % pro Jahr

**Abb. 2** Gemischte Er- und Ablebensversicherung: Versicherungsbeginn 2008**Tab. 7** Marktwerte der Deckungsrückstellung unter Einfluß des Zinsänderungsrisikos

Szenario	MW mit gleichbleibender Gewinnbeteiligung	MW mit variabler Gewinnbeteiligung	MW mit Minimalverzinsung
Ist	5101,30	66,71	–4847,76
Down	11561,23	1518,02	–1934,11
Up	91,97	–425,11	–6854,86

4.2.1 Zinsänderungsrisiko

Dieses Beispiel demonstriert auf anschauliche Weise, dass junge Verträge sensitiver auf das Zinsänderungsrisiko reagieren als Verträge, die bereits länger im Bestand sind. In Tab. 7 ist zu beobachten, dass der Marktwert mit gleichbleibender Gewinnbeteiligung bei einem jungen Vertrag um ca. 100 % schwankt, im Gegensatz dazu schwanken die entsprechenden Werte in Tab. 3 nur um ca. 50 %. Auch der Marktwert mit variabler Gewinnzuteilung reagiert in diesem Fall sehr sensibel auf die Zinsänderungen. Die große Schwankungsbreite ist dadurch zu erklären, dass der Vertrag eine längere Exposition auf das Zinsänderungsrisiko hat. Dieser Effekt ist nicht nur bei sehr jungen, sondern auch bei sehr lang laufenden Verträgen zu beobachten.

Tab. 8 Marktwerte der Deckungsrückstellung unter Einfluß des Sterblichkeitsrisikos

Szenario	MW mit gleichbleibender Gewinnbeteiligung	MW mit variabler Gewinnbeteiligung	MW mit Minimalverzinsung
Ist	5101,30	66,71	−4847,76
Down	5071,64	22,35	−4899,06
Up	5278,59	331,17	−4542,02

Tab. 9 Marktwerte der Deckungsrückstellung unter Einfluß des Stornorisikos

Szenario	MW mit gleichbleibender Gewinnbeteiligung	MW mit variabler Gewinnbeteiligung	MW mit Minimalverzinsung
Ist	5101,30	66,71	−4847,76
Down	5166,66	129,92	−4847,76
Up	5101,30	66,71	−4897,80

4.2.2 Sterblichkeitsrisiko

Anhand des Sterblichkeitsrisikos (Tab. 8) wird ebenso ersichtlich, dass junge Verträge stärker reagieren. Für den Marktwert mit gleichbleibender Gewinnbeteiligung folgt aus Tab. 4 eine Änderung von 0.16 % im down-Szenario. Tabelle 8 hingegen weist eine Änderung von 0.58 % für das down-Szenario aus. Analog zum Zinsänderungsrisiko ist auch hier wieder eine größere Schwankung der Marktwerte mit variabler Gewinnbeteiligung zu erkennen.

4.2.3 Stornorisiko

Das Stornorisiko (siehe hierzu Tab. 9) zeigt ein ähnliches Verhalten der Marktwerte, wie das Zinsänderungs- und Sterblichkeitsrisiko.

Zusammenfassend lässt sich somit sagen, dass die Änderungen der Deckungsrückstellung umso größer sind, je jünger der Bestand des Versicherungsportfolios ist.

4.3 Beispiel 3

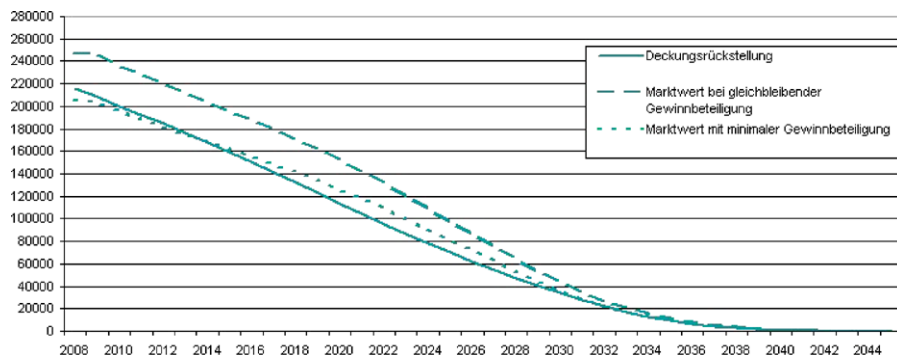
Das dritte Beispiel soll unterstreichen, dass das Langlebighkeitsrisiko durch die Marktwertbetrachtung entsprechend hoch bewertet wird. Dazu werden für einen lebenslangen Rentenvertrag, auf Basis der Parameter in Tab. 10, Marktwerte und Szenarien berechnet:

Hier sind lediglich die realen Kosten und die Sterblichkeit 2. Ordnung für die Berechnung der Best Estimate Rückstellung relevant, da Rentenverträge in der liquiden Phase weder storniert noch prämienfrei gestellt werden können.

Abbildung 3 zeigt die Entwicklung der Deckungsrückstellung zu Buch- und zu Marktwerten. Es fällt wiederum auf, dass der Reservierungsbedarf zu Marktwerten bedeutend höher ist als zu Buchwerten. Zusätzlich ist hier zu beobachten, dass auch der Marktwert bei Mindestverzinsung über der Deckungsrückstellung liegt. Dies ist

Tab. 10 Lebenslange Rentenversicherung mit Rückgewähr des nicht verbrauchten Kapitals im Todesfall

Versicherungsbeginn:	01.01.2005	Bilanzstichtag:	31.12.2008
Geburtsdatum VP:	01.01.1940	Laufzeit:	lebenslang
Jahresrente:	12.000.–		
Rechnungszins:	2,25 %	Gesamtverzinsung:	4 %
Sterbetafel:	AVÖ 2005R		
Reale Kosten:	80 % der tariftl.	Reale q_x :	80 % der tariftl.

**Abb. 3** Lebenslange Rentenversicherung mit Kapitalrückgewähr

auf Grund der angenommenen realen Sterblichkeit von 80 % der Fall. Diese Verringerung in der Sterblichkeit führt dazu, dass die Rente tendenziell länger ausgezahlt wird und damit für das Versicherungsunternehmen höhere künftige Verpflichtungen entstehen.

Die Tab. 11 und 12 fassen die Änderungen der Marktwerte auf Zins- und Sterblichkeitsszenarien zusammen. Das Stornorisiko ist bei liquiden Renten nicht relevant, da keine Stornooption besteht. Für diese Tarifgruppe werden die Marktwerte unter Annahme einer gleichbleibenden und einer minimalen Gewinnbeteiligung berechnet.

4.3.1 Zinsänderungs- und Sterblichkeitsrisiko

Beim Zinsänderungsrisiko (Tab. 11) fällt auf, dass die Marktwerte bedeutend stabiler sind, als bei kapitalbildenden Tarifen. Auf Grund der Abnahme der Deckungsrückstellung fallen Zinsänderungen weniger ins Gewicht. In Tab. 12 sind die Änderungen unter dem Sterblichkeitsrisiko zusammengefasst. Im Gegensatz zu den kapitalbildenden Versicherungen, wo ein Sinken der Sterblichkeit eine Reduktion des Reservierungserfordernisses bewirkt, ist hier der gegenteilige Effekt zu beobachten. Sinkt die Sterblichkeit, verlängert sich die Leistungsdauer der Versicherung (insbesondere gilt dies bei einer lebenslangen Rentenversicherung) und damit steigt der Marktwert der Deckungsrückstellung.

Für eine Diskussion des Langlebigkeitsrisikos im Rahmen des Solvency II Ansatzes für variable annuities wird hier auf Börger (2010) verwiesen.

Tab. 11 Marktwerte der Deckungsrückstellung unter Einfluß des Zinsänderungsrisikos

Szenario	MW mit gleichbleibender Gewinnbeteiligung	MW mit Minimalverzinsung
Ist	248.300	205.747
Down	285.361	236.457
Up	212.684	176.235

Tab. 12 Marktwerte der Deckungsrückstellung unter Einfluß des Sterblichkeitsrisikos

Szenario	MW mit gleichbleibender Gewinnbeteiligung	MW mit Minimalverzinsung
Ist	248.300	205.747
Down	248.502	205.915
Up	247.310	204.927

5 Anmerkungen zur Schätzung der Parameter

In der hier vorgestellten Berechnungsmethodik wird angenommen, dass die reale Sterblichkeit, die Storno-, sowie die Prämienfreistellungswahrscheinlichkeit bekannt sind. Die risikolose Zinskurve wird als gegeben angenommen um daraus in weiterer Folge die Forward-Zinssätze zu berechnen.

Die Schätzung der aktuarischen Parameter (q_x , q_t^{st} und q_t^{prfr}) ist jedoch eine große Herausforderung an das Aktuariat und vor allem im Hinblick auf die generell langen Laufzeiten von Versicherungsverträgen stellt sich die Frage nach robusten Methoden und Ansätzen.

Die Sterbewahrscheinlichkeiten beinhalten ein Trendrisiko (die Menschen werden immer älter), das bei nicht korrekter Messung zu markanten Fehlschätzungen vor allem bei der Langlebigkeit führen kann. Aus diesem Grund werden in einigen Arbeiten stochastische Modelle verwendet. Siehe z.B. Börger (2010), der die Auswirkungen des Solvency II Standardansatzes für das Langlebigkeitsrisiko untersucht, oder auch Börger et al. (2011), die stochastische Mortalitätsmodelle für Anwendungen im Rahmen von Solvency II und Swiss Solvency Test präsentieren.

Andererseits erwarten einige Experten, dass sich der Langlebigkeitstrend nicht in der Geschwindigkeit fortsetzt (momentan erhöht sich die Lebenserwartung um 2.5 Jahre innerhalb von 10 Jahren), sondern abschwächt bzw. sogar umkehrt (siehe hierzu z.B. Blake 2011). Unter diesem Gesichtspunkt können die aktuellen Sterbetafeln möglicherweise noch länger für eine gute und robuste Schätzung verwendet werden.

Anders als bei den Mortalitätsraten, wo die Gesamtbevölkerung als Basis für die Schätzung herangezogen werden kann, werden die Storno- und Prämienfreistellungswahrscheinlichkeiten aus dem jeweiligen Versicherungsportfolio ermittelt.

Damit ist die Größe des Unternehmens und die Datenqualität in der Vergangenheit von entscheidender Bedeutung. Eine Untergliederung in viele Klassen zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten scheint auf den ersten Blick attraktiv, da dadurch auf Tarifbasis (u.U. nach Geschlecht und Alter der versicherten Person getrennt) Stornoquoten ermittelt werden können. Allerdings ist es hier unbedingt notwendig die Signifikanz der Klassen, sowie die Datenmenge zu überprüfen. Dies kann z.B. durch

Methoden aus der Kreditabilitätstheorie (siehe z.B. Bühlmann und Gisler 2005) erreicht werden.

Für die in Abschn. 4 präsentierten Beispiele wurden die Stornoquoten für Verträge mit laufender Zahlungsweise und für Verträge mit Einmalprämie getrennt für jedes Vertragsjahr geschätzt. Diese Aufteilung bietet bereits ein sehr großes Spektrum zur Modellierung und ist für das Portfolio eines mittleren Versicherungsunternehmens geeignet.

Weitere Möglichkeiten zur Bestimmung der Stornoquoten sind u.a. auch eine Kopplung an ökonomische Faktoren, wie das Niveau der Zinskurve, die Inflationsrate, etc., oder auch komplexere stochastische Modelle. In Hinblick auf die relativ geringen Schwankungen der Marktwerte durch die Stornoszenarien (vgl. die Beispiele in Abschn. 4), sollte stets auch die erhöhte Komplexität des Modells gegen den daraus resultierenden Mehrwert abgewogen werden.

Anhand der Beispiele im vorangegangenen Abschnitt wird klar, dass Zinsänderungen das größte Risiko für die Passivseite darstellen. Für die QIS wurden risikolose Spotraten zur Verfügung gestellt, aus denen die Forwardsätze für eine risikoneutrale Betrachtung berechnet wurden.

Scheldon und Smith (2004) analysieren die Verwendung von stochastischen Zinsmodellen im Zusammenhang mit der Bewertung von Cashflows. Gaillardetz (2008) untersucht die Auswirkungen von stochastischen Zinsmodellen auf die Bewertung von Versicherungsverträgen mit Einmalprämie, legt hier jedoch den Fokus auf variable annuities und schließt Kosten und Storno aus.

Zusätzlich zu stochastischen Zinsmodellen können Managementregeln für die künftigen Gewinnbeteiligungen verwendet werden. Allerdings ist gerade bei langen Laufzeiten die Frage, inwieweit stochastische Zinsmodelle und Managementregeln für eine robuste Berechnung der Marktwerte vernünftig eingesetzt werden können.

Aus dieser Überlegung heraus beinhaltet der vorgestellte Ansatz die Managementregel insofern, als eine Anpassung der Gewinnbeteiligung nach der Höhe der Forward-Zinsen der aktuellen Zinskurve erfolgt. Dies ist nachvollziehbar und plausibel, da die Aktivseite großteils aus Anleihen besteht und damit die Abhängigkeit von der Höhe der Kapitalmarktzinsen unmittelbar gegeben ist. In O'Brien (2007) werden auch Forwardsätze erwähnt, die einen Kreditaufschlag beinhalten. Dies wird durch die QIS-Specifications mittels des Illiquiditätsaufschlags in analoger Weise umgesetzt.

6 Zusammenfassung und Fazit

Die Bewertung der Deckungsrückstellung zu Marktwerten ist im Kontext von Solvency II ein zentrales Thema und gewinnt auch im Rahmen von IFRS (2010) zunehmend an Bedeutung. Dennoch gibt es bisher in der Literatur noch keine systematische Vorgangsweise bzw. ein Formelwerk zur Berechnung des Best Estimates der versicherungstechnischen Rückstellungen Leben.

Konzepte zur Marktwertberechnung werden aktuell praktisch zeitgleich im Rahmen von Solvency II/QIS (siehe QIS5 Technical Specifications, CEIOPS 2010) und IFRS 4 (siehe IFRS exposure draft 2010) vorgestellt. Zusätzlich existieren schon Vor-

gaben im Kontext der Market Consistent Embedded Value Prinzipien des CFO Forums (2009). Obwohl abzusehen ist, dass diese Konzepte allein von ihrer Zielsetzung her nicht ganz einheitlich sind, so lassen sich doch bestimmte grundlegende Gemeinsamkeiten zur Ermittlung der Marktwerte herauslesen:

- Anwendung von aktuarischen und stochastischen Bewertungsmethoden
- Marktkonsistente Diskontierung von wahrscheinlichkeitsgewichteten zukünftigen Cashflows
- Berücksichtigung von Optionen und Garantien
- Ansatz einer Risk-Margin

In der vorliegenden Arbeit wird eine Berechnungsmethodik beschrieben, die zum einen auf Einzelvertragsbasis aufgesetzt ist und zum anderen die bekannten Konzepte der Versicherungsmathematik unter Berücksichtigung der oben beschriebenen Punkte anwendet. Die Kalkulation der Kommutationszahlen und der versicherungsmathematischen Barwerte mit einem marktkonsistenten Zinssatz (mit oder ohne Illiquiditätsaufschlag) und Rechnungsgrundlagen 2. Ordnung erlaubt eine methodisch exakte Bewertung (im Rahmen der Annahmen) der Deckungsrückstellung zu Marktwerten für jeden Tarif auf Einzelvertragsebene und ermöglicht durch Modifikationen der entsprechenden Parameterwerte (Zinskurven, Stornoquoten, Sterblichkeiten) auch die Berechnung der Szenarien entsprechend der laufenden Quantitative Impact Study (QIS) im Kontext von Solvency II.

Neben der Mindestverzinsung der Reserve erhalten die Versicherungsnehmer auch einen entsprechenden Anteil am darüber hinaus erwirtschafteten Gewinn (angesamelter Gewinn), wobei der Anteil in Österreich 85 % beträgt (entsprechend Gewinnbeteiligungsverordnung). Für Deutschland wird hier auf die VVG-Reform 2008 verwiesen.

Da die zukünftige Höhe dieser Gewinnbeteiligung von der jeweiligen Kapitalanlagestruktur der Versicherung abhängt, sind de facto keine objektiven Aussagen über künftige Gewinnanteile ohne komplexe Managementregeln über die zukünftige Struktur der Kapitalanlagen möglich. Um den Marktwert unabhängig von den Kapitalanlagen berechnen zu können, unterstellen wir bei der Berechnung der Marktwerte eine Veranlagung der künftigen Beiträge in risikofreie festverzinsliche Anleihen mit einer Rendite entsprechend den Forward-Sätzen, welche wir aus der marktkonsistenten Spotkurve des Betrachtungszeitpunktes berechnen. Durch diese Vorgangsweise wird sicher gestellt, dass der Marktwert unabhängig von (letztendlich willkürlichen) Managementregeln bestimmt wird. Allerdings können damit die Zeitwerte von Optionen und Garantien im Gegensatz zu den inneren Werten nicht berücksichtigt werden. Ähnliches gilt für andere Optionen wie Storno oder Prämienfreistellung.

Die Ermittlung der Zeitwerte der Optionen erfordert zusätzlich die Durchführung von Simulationsrechnungen auf Basis marktkonsistenter Szenarien (siehe Baur 2009), wobei insbesondere für die Storno-Option auch Abhängigkeiten des Stornoverhaltens der Versicherungsnehmer von Kapitalmarktszenarien angenommen werden müssen. Die Berücksichtigung der Zeitwerte führt auf Grund der zwingenden Annahmen über die Marktkonsistenz der Kapitalanlagen dazu, dass die Marktwerte entsprechend ansteigen und nur bei Wahl einer risikofreien Kapitalanlage für die Finanzoption unseren ermittelten Werten entsprechen.

In allen Konzepten (IFRS, Solvency II, MCEV) ist neben der Berechnung des Marktwertes (Best Estimate) auch eine sog. Risk Margin vorgesehen, welche die nicht hedgebaren Risiken (MCEV, Solvency II) oder eine Bewertungsreserve zur Neutralisierung von Anfangsgewinnen und/oder die Unsicherheit künftiger Cash-flows (IFRS) definiert. Auch diese Risk Margin ist in der vorgestellten Methodik nicht enthalten und muss nach den jeweiligen Vorgaben zusätzlich berechnet werden.

Für die Praxis besteht der Hauptnutzen dieser Arbeit darin, dass Aktuarien zu einem bereits vorhandene versicherungsmathematische Algorithmen und Formelwerke aus der Berechnung von Bilanzansätzen zu HGB/UGB-Buchwerten nach entsprechender Modifikation zur Marktwertberechnung verwenden können und zum anderen dient die Methode als Grundlage zur Darstellung von Marktwerten für Solvency II/QIS, IFRS aber auch MCEV.

Die Stärke des Ansatzes liegt darüberhinaus in der einfachen Handhabung von Sensitivitätsanalysen, welche bei der QIS gefordert sind.

Literatur

- Baur, T.: Marktkonsistente Bewertung in der Lebensversicherung, ifa-Schriftreihe (2009)
- Blake, D.: Longevity as an asset class. In: IME Conference (2011)
- Börger, M.: Deterministic stock vs. stochastic value-at-risk—an analysis of the Solvency II standard model approach to longevity risk. *Blätter DGVFM* **31**, 225–259 (2010)
- Börger, M., Fleischer, D., Kuksin, N.: Modelling mortality trend under modern solvency regimes. Working paper (2011)
- Bühlmann, H., Gisler, A.: A Course in Credibility and Its Applications. Springer, Berlin (2005)
- Bowers, N., Gerber, H., Hickman, J., Jones, D., Nesbitt, C.: Actuarial Mathematics. Society of Actuaries, Itasca (1986)
- CEIOPS: QIS4 technical specifications. Brussels (2008)
- CEIOPS: QIS5 technical specifications. Brussels (2010)
- CFO Forum: Market consistent embedded value principles (2009)
- Gaillardetz, P.: Valuation of life insurance products under stochastic interest rates. *Insur. Math. Econ.* **42**, 212–226 (2008)
- IFRS Foundation Publications Department: IFRS exposure draft/2010/8 (2010)
- Kainhofer, R., Predota, M., Schmock, U.: The new Austrian annuity valuation table AVÖ 2005R, *Mitteilungen der Aktuarsvereinigung Österreichs*, 55–135 (2006)
- O'Brien, C.: Market-Consistent Valuation of Life Insurance Business: The U.K. Experience. Society of Actuaries, Itasca (2007)
- Schmidt, K.: Versicherungsmathematik. Springer, Berlin (2006)
- Scheldon, T.J., Smith, A.D.: Market consistent valuation of life assurance business. *Br Actuar J* **10**, 543–626 (2004). III
- Wüthrich, M.V., Bühlmann, H., Furrer, H.: Market-Consistent Actuarial Valuation. Springer, Berlin (2007)